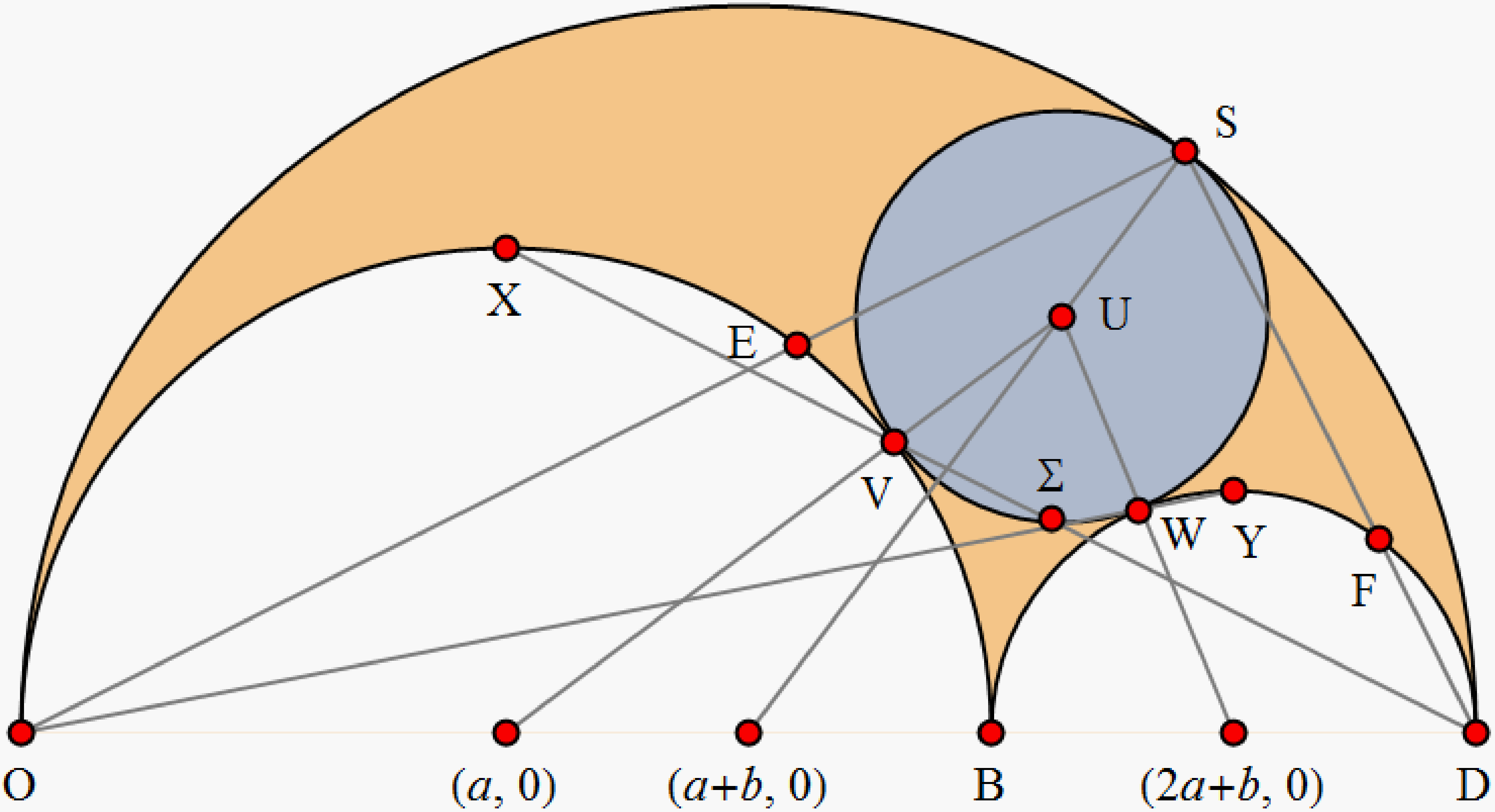


АРБЕЛОС

Кто придумал и изучил арбелос?

Многие известные исследователи занимались этой темой, в том числе Архимед, который совершил много прекрасных открытий за свою долгую жизнь, а будучи уже зрелым ученым, в 50 лет, он увлекся геометрией и не расставался с ней до конца своих дней.

Цель

- Используя исторический подход познакомиться с геометрической фигурой арбелосом и рассмотреть её свойства.

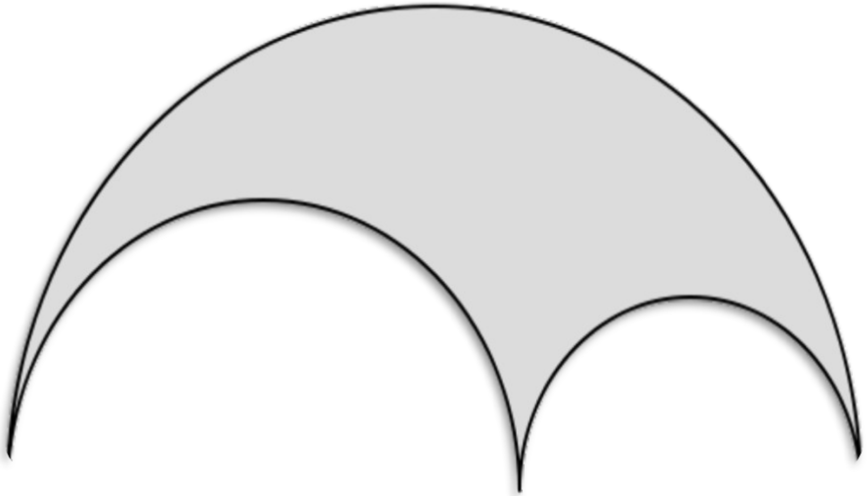
Задачи

- Познакомится с понятием арбелоса
- Доказать свойства арбелоса
- Применить полученнные знания при решении задач на окружности

Арбелос

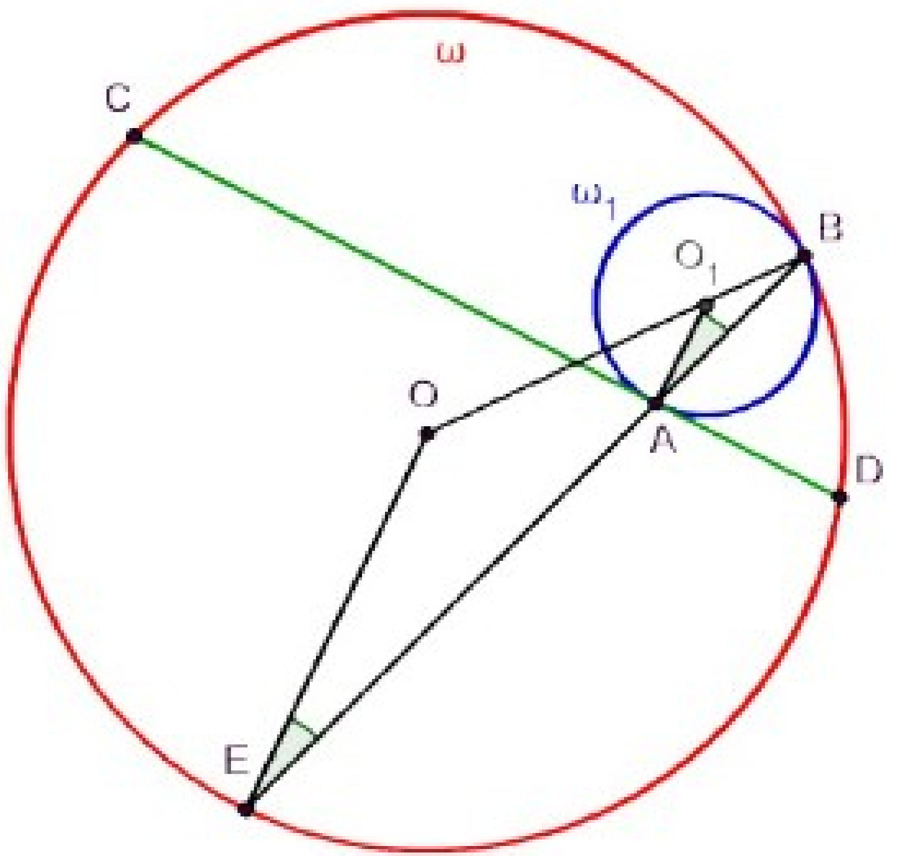
- В своих занятиях геометрией Архимед много внимания уделял изучению свойств фигуры, носящей название ***арбелос***, или скорняжный нож. Это название фигура получила из– за сходства с очертаниями ножа, использовавшегося скорняками для разделки кожи.

Если взять на прямой три последовательные точки A, B и C и построить три полуокружности с диаметрами AB, BC, AC, расположенные по одну сторону от прямой, то фигура, ограниченная этими полуокружностями, и является арбелосом.



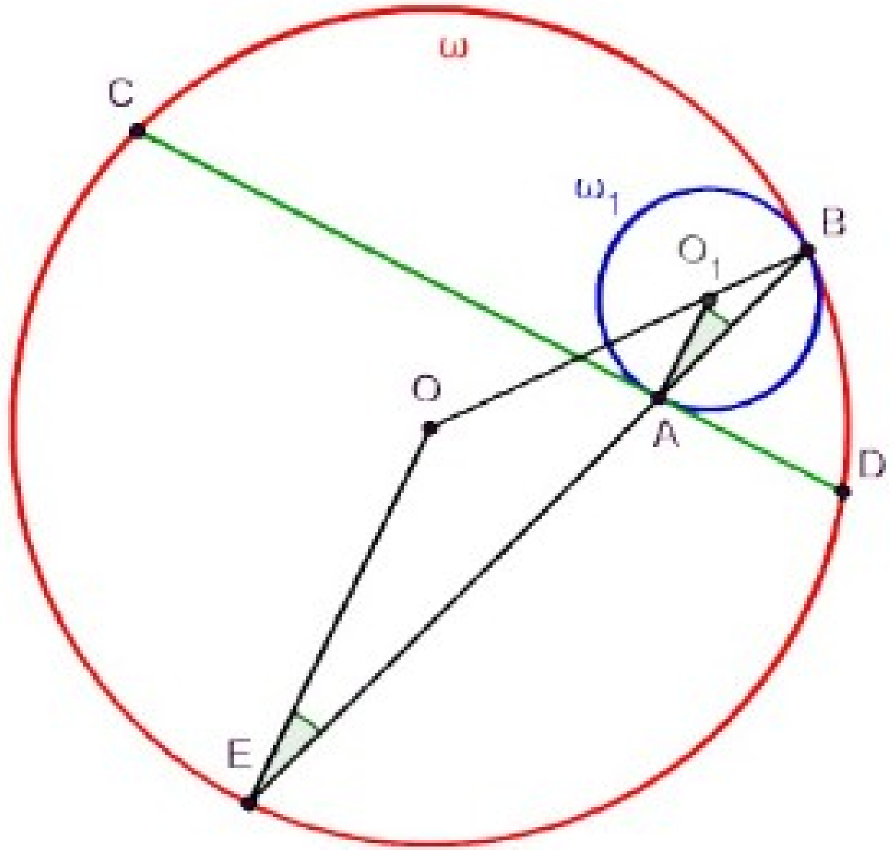
Лемма

- Даны две касающиеся окружности ω и ω1 и прямая CD, касающаяся одной из них и пересекающая другую. Пусть B — точка касания окружностей, A — точка касания прямой и окружности, E — вторая точка пересечения прямой AB и окружности ω. Докажите, что E — середина дуги CD.



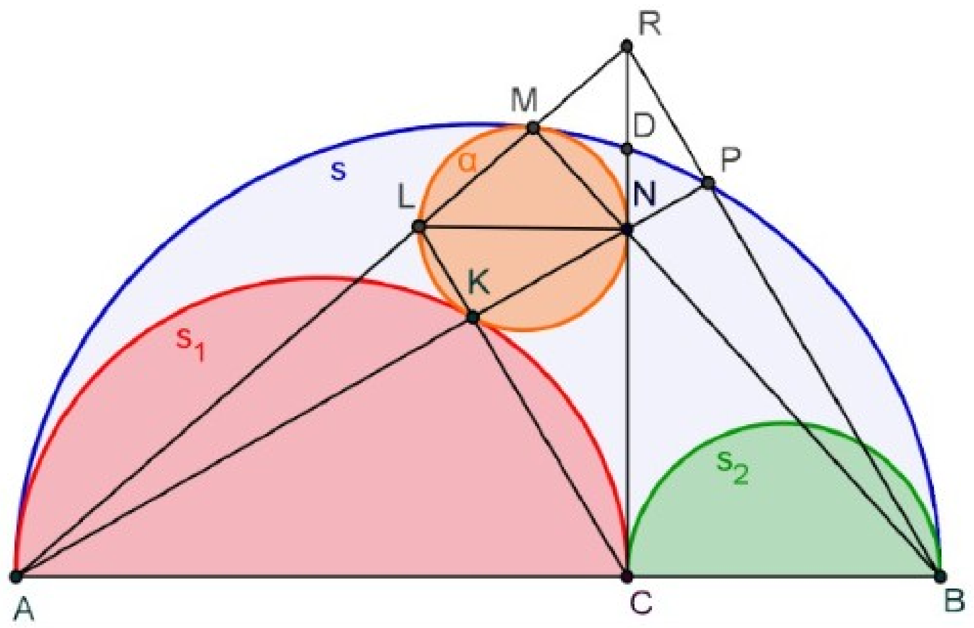
Доказательство

- Доказательство. Пусть O и O1 — центры окружностей ω и ω1 соответственно; тогда треугольники OEB и O1AB — равнобедренные и у них общий угол при основании O1BA. Следовательно, OEB = O1AB OE || O1A. O1ACD OECD E — середина дуги CD. Заметим, что в случае внешнего касания окружностей лемма тоже верна, а доказательство аналогично.



Задача

- Пусть M — точка касания α и s, N — точка касания α и CD, K — точка касания α и s1. Применим лемму к нашей конструкции; тогда прямая MN проходит через точку B и прямая NK проходит через точку A. Далее, P — вторая точка пересечения NK и s, R — точка пересечения CD и BP. N — точка пересечения высот в треугольнике ARB, так как APB = RCB = 90°, следовательно прямая RA проходит через точку M.



Пусть L — вторая точка пересечения RA и α, тогда $\angle LKN = 90°$ (как угол, опирающийся на диаметр), но $\angle AKC = 90° \Rightarrow$ точки L, K и C лежат на одной прямой.

LN — диаметр окружности α, следовательно LN || AB, следовательно

$$\triangle RLN \sim \triangle RAC \Rightarrow \frac{LN}{AC} = \frac{LR}{AR}.$$

Заметим, что LC || RB, так как они перпендикулярны AP, следовательно

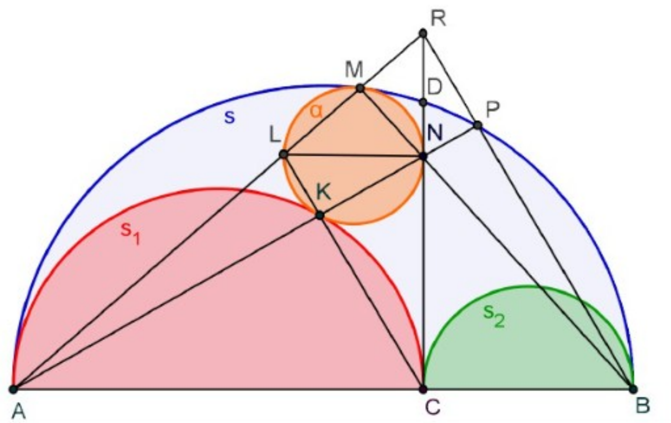
$$\frac{AL}{AR} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{LR}{AR} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow LN = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

В обозначениях из первого решения полученное выражение принимает вид

$$2r = \frac{2a \cdot 2b}{2(a+b)}$$

и после сокращения общих множителей совпадает с выражением

$$r = \frac{ab}{a+b}.$$



Задача

- Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиусом R. Найдите радиус третьей, которая касается обеих данных и прямой, проходящей через их центры.

Решение:

$O2H^2 = (R – x)^2 – x^2 = R^2 – 2RX = R(R – 2x)$

$O_1H^2 = (r + x)^2 – x^2 = r^2 + 2rx$

$O1O2 = R – r = HO2 + HO1$

$x (r – R) + Rr = \sqrt{R^2 - 2Rx} * \sqrt{r^2 + 2rx}$

$x^2(r – R)^2 + R^2r^2 + 2xRr (r – R) =$

$(r^2 + 2rx) (R^2 – 2Rx)x^2(r^2 – 2rR + R^2) +$

$R2r^2 + 2xr^2R –$

$2xrR^2 = x^2r^2 – 2rRx^2 + x^2R^2 + 4rRx^2 =$

$4xR2r – 4xRr2$

$x^2(r + R)^2 = 4xRr (R – r)$

$x = \frac{4Rr (R - r)}{(r + R)(r + R)}$